

Ad-Soyad:

07.04.2019

Numara:

SOYUT MATEMATİK II ARASINAV SORULARI

1) a) Kafes tanımını yapınız.

b) $A \neq \emptyset$ olmak üzere $(P(A), \subseteq)$ bir kafestir. Gösteriniz.

2) Doğal sayılarda çarpma işleminin birleşme özelliği var mıdır? Gösteriniz.

3) a) $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$m < n \text{ ve } p < q \Rightarrow mp < nq$$

olduğunu gösteriniz.

b) $[2,3] + [5,1][4,2] < [7,3][2,5]$ ifadesi doğru mudur? Gösteriniz.

4) $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $c > 0$ olmak üzere

$$a < b \Rightarrow a < b + c$$

olduğunu gösteriniz.

5) $a, b, c, x, y \in \mathbb{Z}$ için

$$\left. \begin{array}{l} a|c \\ b|c \\ ax + by = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow ab|6c$$

olduğunu gösteriniz.

CEVAP ANAHTARI

BAŞARILAR

1) a) (X, \leq) bir kısmi sıralı küme olmak üzere
 $\forall x, y \in X$ için $\sup\{x, y\}$, $\inf\{x, y\}$ mevcutsa X e
bir kafes denir.

b) $A \neq \emptyset$, $(P(A), \subseteq)$ bir kafestir. $\forall A, B \in P(A)$ olsun.

$$A \cup B = A \cup B$$

$$A \cap B = A \cap B$$

alınırsa $P(A)$ kümesinin bir kafes olduğu görülür.

2) $A = \{ p \in \mathbb{N} : \forall m, n \in \mathbb{N} \text{ için } (mn)p = m(np) \} \subseteq \mathbb{N}$
olsun. $A = \mathbb{N}$?

• $0 \in A$ mı ?

$$\left. \begin{array}{l} (mn) \cdot 0 = 0 \\ m \cdot 0 = 0 \Rightarrow m(n \cdot 0) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (mn)0 = m(n0) \\ \Rightarrow 0 \in A$$

• $\forall p \in A$ için $p^+ \in A$ mı ?

$$p \in A \Rightarrow \forall m, n \in \mathbb{N} \text{ için } (mn)p = m(np) \dots (*)$$

$$p^+ \in A \stackrel{?}{\iff} \forall m, n \in \mathbb{N} \text{ için } (mn)p^+ = m(np^+) \dots ?$$

$$(mn)p^+ = (mn)p + mn$$

$$\stackrel{(*)}{=} m(np) + mn = m(np+n) \\ = m(np^+)$$

$$\therefore p^+ \in A$$

$$\therefore A = \mathbb{N}$$

$$\therefore \forall m, n, p \in \mathbb{N} \text{ için } (mn)p = m(np)$$

3) a) $m < n \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} \ni n = m + k$
 $p < q \Rightarrow \exists s \in \mathbb{N} \ni q = p + s$
 $mp < nq \stackrel{?}{\Leftrightarrow} \exists r \in \mathbb{N} \ni nq = mp + r \quad ?$

$$nq = (m+k)(p+s)$$

$$= mp + \underbrace{ms + kp + ks}_{\in \mathbb{N}}$$

$$\Rightarrow \exists r \in \mathbb{N} \ni nq = mp + r$$

$$\Rightarrow mp < nq$$

b) $[2,1] + [5,1][4,2] < [7,3][2,5]$
 $\Leftrightarrow [2,3] + [5 \cdot 4 + 1 \cdot 2, 5 \cdot 2 + 1 \cdot 4] < [7 \cdot 2 + 3 \cdot 5, 7 \cdot 5 + 2 \cdot 3]$
 $\Leftrightarrow [2,3] + [22,14] < [29,41]$
 $\Leftrightarrow [24,17] < [29,41]$
 $\Leftrightarrow 24 + 41 < 17 + 29$
 $\Leftrightarrow 65 < 46$

\therefore ifade yanlıştır

4) $a = [x,y], b = [m,n], c = [z,t], x,y,m,n,z,t \in \mathbb{N}$
 $c = [z,t] > 0 \Rightarrow z > t$
 $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} \ni z = t + k \quad \dots \textcircled{*}$

$$a < b \Leftrightarrow [x,y] < [m,n]$$

$$\Leftrightarrow x + n < y + m$$

$$\Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{N} \ni y + m = x + n + r \quad \dots \textcircled{*} \textcircled{*}$$

⊕ ve ⊗⊗'i kullanarak

$$(y+m)+z = (x+n+r) + (t+k)$$

$$\Rightarrow (y+m)+z = (x+n+t) + (r+k)$$

$$\Rightarrow x+n+t < y+m+z$$

$$\Rightarrow x + (n+t) < y + (m+z)$$

$$\Rightarrow [x, y] < [m+z, n+t]$$

$$\Rightarrow [x, y] < [m, n] + [z, t]$$

$$\Rightarrow a < b+c$$

5) $a|c \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \ni c = ak$

$b|c \Rightarrow \exists t \in \mathbb{Z} \ni c = bt$

$ax+by = 3 \Rightarrow c(ax+by) = 3c$

$\Rightarrow \underline{c}ax + \underline{c}by = 3c$

$\Rightarrow bt(ax) + ak(by) = 3c$

$\Rightarrow ab(tx+ky) = 3c$

$\Rightarrow 2ab(tx+ky) = 6c$

$\Rightarrow ab(2tx+2ky) = 6c$

$\Rightarrow ab|6c$